

УДК 530: 517.956

DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-115-121

Святослав Евгеньевич Холодовский¹,
доктор физико-математических наук, профессор,
Забайкальский государственный университет
(672039, Россия, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30)
e-mail: hol47@yandex.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-3983-1384>

Алексей Олегович Орлов²,
кандидат физико-математических наук,
Институт природных ресурсов, экологии и криологии СО РАН
(672014, Россия, г. Чита, ул. Недорезова, 16а),
e-mail: Orlov_A_O@mail.ru,
<https://orcid.org/0000-0003-2574-181X>

О решении задач теплопроводности на анизотропной плоскости со слабопроницаемой плёнкой

Рассматривается задача теплопроводности на анизотропной плоскости (x, y) , разделённой на две полуплоскости $D_1(-\infty < x < 0, y \in R)$ и $D_2(0 < x < \infty, y \in R)$ слабопроницаемой плёнкой $x = 0$, при заданных источниках тепла и заданной начальной температуре. Эллипсы анизотропии произвольны (по величине и направлению) и одинаковы во всех точках плоскости. С помощью метода свёртывания разложений Фурье решение задачи выражено в однократных квадратурах через известное решение классической задачи Коши на изотропной плоскости без плёнки. Полученные результаты имеют практический интерес в задачах распространения и сохранения тепла в материалах, обладающих анизотропными свойствами (кристаллические, волокнистые материалы), при наличии теплоизоляционной плёнки.

Ключевые слова: краевые задачи теплопроводности, слабопроницаемая плёнка, метод свёртывания разложений Фурье

Многие искусственные и естественные теплопроводящие материалы обладают анизотропными свойствами. К ним относятся различные кристаллические и волокнистые материалы, в том числе затвердевшие при определённых условиях охлаждения жидкости, в частности, покровные ледники и другие ледяные структуры. Под воздействием многих факторов (неравномерной механической деформации, перепада температур и др.) в анизотропных средах образуются трещины, заполненные воздухом, в которых коэффициенты теплопроводности много меньше коэффициентов

¹С. Е. Холодовский готовил и написал статью.

²А. О. Орлов систематизировал материал статьи.

теплопроводности окружающей среды. Указанные трещины моделируются слабо-проницаемыми плёнками. Поэтому имеет большой интерес исследование процессов теплопроводности в анизотропных средах при наличии слабопроницаемой плёнки [1–10].

Рассмотрим на плоскости с декартовыми координатами x, y анизотропную теплопроводящую среду с тензором проницаемости T вида

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

где a, b, c – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям $a > 0$, $c > 0$, $ac - b^2 > 0$, т. е. T – симметричный положительно определенный тензор второго ранга [1, с. 7–17], [2]. Пусть плоскость x, y состоит из двух полуплоскостей $D_1(-\infty < x < 0, y \in R)$ и $D_2(0 < x < \infty, y \in R)$, разделенных слабопроницаемой плёнкой $x = 0$. На данной плоскости рассмотрим линейные процессы теплопроводности. Компоненты скорости (v_{xi}, v_{yi}) теплового потока в зонах D_i имеют вид [1, с. 9]

$$v_{xi} = a\partial_x u_i + b\partial_y u_i, \quad v_{yi} = b\partial_x u_i + c\partial_y u_i, \quad (1)$$

где $u_i(x, y, t)$ – потенциал (температура) в D_i , t – время, $\partial_x = \partial/\partial x$. Для функций $u_i(x, y, t)$ в D_i задача имеет вид [3, с. 30; 1, с. 21]

$$a\partial_{xx}u_1 + 2b\partial_{xy}u_1 + c\partial_{yy}u_1 - \alpha^2\partial_t u_1 = 0, \quad x < 0, \quad (2)$$

$$a\partial_{xx}u_2 + 2b\partial_{xy}u_2 + c\partial_{yy}u_2 - \alpha^2\partial_t u_2 = f(x, y, t), \quad x > 0, \quad (3)$$

$$x = 0 : \quad u_2 - u_1 = Bv_{x1}, \quad v_{x2} = v_{x1}, \quad (4)$$

$$u_{1|t=0} = 0, \quad u_{2|t=0} = \varphi(x, y), \quad (5)$$

где $\alpha^2 = \rho\sigma$, ρ – плотность материала, σ – его теплоёмкость, $f(x, y, t)$ – заданная плотность внешних источников тепла ($f \equiv 0$ в окрестности плёнки $x = 0$), функции v_{xi} имеют вид (1), $B > 0$ – параметр слабопроницаемой плёнки, $\varphi(x, y)$ – начальная температура точек плоскости, $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, $\partial_{xy} = \partial^2/\partial x\partial y$. В данном случае задача (2)–(5) неоднородна в D_2 (и однородна в D_1), что не умаляет общности, т. к. при неоднородных условиях в D_1 (и однородных в D_2) задача решается аналогично, а в общем случае решение задачи имеет вид суммы решений указанных задач.

Посредством замены независимых переменных

$$\xi = \frac{K}{a}x, \quad \eta = y - \frac{b}{a}x \quad (6)$$

приведём задачу (2)–(5) к виду

$$\partial_{\xi\xi}u_1 + \partial_{\eta\eta}u_1 - p^2\partial_tu_1 = 0, \quad \xi < 0, \quad (7)$$

$$\partial_{\xi\xi}u_2 + \partial_{\eta\eta}u_2 - p^2\partial_tu_2 = F(\xi, \eta, t), \quad \xi > 0, \quad (8)$$

$$\xi = 0 : \quad u_2 - u_1 = BK\partial_\xi u_1, \quad \partial_\xi u_2 = \partial_\xi u_1, \quad (9)$$

$$u_{1|t=0} = 0, \quad u_{2|t=0} = \Phi(\xi, \eta), \quad (10)$$

где $u_i(\xi, \eta, t)$ – искомые функции, $p^2 = \alpha^2a/K^2$, $K = \sqrt{ac - b^2}$, $F(\xi, \eta, t) = f(x, y, t)$, $\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x, y)$.

Наряду с задачей (7)–(10) рассмотрим аналогичную классическую задачу Коши на плоскости без плёнки:

$$\partial_{\xi\xi}U + \partial_{\eta\eta}U - p^2\partial_tU = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ F(\xi, \eta, t), & \xi > 0, \end{cases} \quad U|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \Phi(\xi, \eta), & \xi > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Методом свёртывания разложений Фурье [4] выведем формулы, выражающие решение $u_i(\xi, \eta, t)$ задачи (7)–(10) через решение $U(\xi, \eta, t)$ задачи (11).

Выведем сначала аналогичные формулы для установившихся процессов, когда все функции не зависят от времени t , т. е. рассмотрим задачи (7)–(11) на плоскости для оператора Лапласа:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \xi < 0; \quad \Delta u_2 = F(\xi, \eta), \quad \xi > 0, \quad (12)$$

$$\xi = 0 : \quad u_2 - u_1 = BK\partial_\xi u_1, \quad \partial_\xi u_2 = \partial_\xi u_1 \quad (13)$$

и

$$\Delta U = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ F(\xi, \eta), & \xi > 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $\Delta u = \partial_{\xi\xi}u + \partial_{\eta\eta}u$. Задачи (12)–(14) допускают применение метода Фурье по переменной η вдоль плёнки.

Пусть функция $U(0, \eta)$ (14) разлагается в интеграл Фурье [5, с. 524]:

$$U(0, \eta) = \int_0^\infty g(\eta, z)dz, \quad g(\eta, z) = g_1(z) \sin z\eta + g_2(z) \cos z\eta, \quad (15)$$

где

$$g_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(0, \eta) \sin z\eta d\eta, \quad g_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(0, \eta) \cos z\eta d\eta.$$

Отсюда решение уравнения (14) при $\xi \leq 0$ представимо в виде

$$U(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} e^{z\xi} g(\eta, z) dz, \quad \xi \leq 0. \quad (16)$$

Решение задачи (12), (13) будем искать в виде

$$u_1(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} q_1(z) e^{z\xi} g(\eta, z) dz, \quad \xi < 0, \quad (17)$$

$$u_2(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) + \int_0^{\infty} q_2(z) e^{-z\xi} g(\eta, z) dz, \quad \xi > 0, \quad (18)$$

где функции $q_i(z)$ подлежат определению, функция $g(\eta, z)$ имеет вид (15). При этом функции $u_i(\xi, \eta)$ удовлетворяют соответствующему уравнению (12) (при условии сходимости и дифференцируемости интегралов (17), (18)). Из условий сопряжения (13) с учётом равенства (16) найдем

$$q_1(z) = \frac{\gamma}{z + \gamma}, \quad q_2(z) = 1 - \frac{\gamma}{z + \gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{2}{BK}. \quad (19)$$

Отсюда с учётом равенства (16) решение (17), (18) задачи (12), (13) примет вид

$$u_1(\xi, \eta) = \gamma \int_0^{\infty} \frac{e^{z\xi}}{z + \gamma} g(\eta, z) dz, \quad \xi < 0, \quad (20)$$

$$u_2(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) + U(-\xi, \eta) - \gamma \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\xi}}{z + \gamma} g(\eta, z) dz, \quad \xi > 0. \quad (21)$$

Заменяя в равенстве (16) переменную ξ на $\xi - r$, умножая полученное равенство на $e^{-\gamma r}$ и интегрируя по $r \in (0, \infty)$, получим формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma r} U(\xi - r, \eta) dr = \int_0^{\infty} \frac{e^{z\xi}}{z + \gamma} g(\eta, z) dz, \quad \xi \leq 0.$$

Отсюда решение (20), (21) задачи (12), (13) непосредственно выражается через решение уравнения (14) без разложений Фурье

$$u_1(\xi, \eta) = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma r} U(\xi - r, \eta) dr, \quad \xi < 0, \quad (22)$$

$$u_2(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) + U(-\xi, \eta) - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma r} U(-\xi - r, \eta) dr, \quad \xi > 0. \quad (23)$$

Теорема. Если функция $U(\xi, \eta, t)$ является решением задачи Коши (11) и удовлетворяет условию $U(\xi, \eta)e^{-\gamma|\xi|} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow -\infty$, где постоянная $\gamma > 0$ имеет вид (19), то решение $u_i(\xi, \eta, t)$ задачи (7)–(10) строится по формулам (22), (23):

$$u_1(\xi, \eta, t) = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma r} U(\xi - r, \eta, t) dr, \quad \xi < 0, \quad (24)$$

$$u_2(\xi, \eta, t) = U(\xi, \eta, t) + U(-\xi, \eta, t) - \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma r} U(-\xi - r, \eta, t) dr, \quad \xi > 0, \quad (25)$$

Утверждение теоремы проверяется непосредственной подстановкой $u_i(\xi, \eta, t)$ (24), (25) в условия задачи (7)–(10).

Отметим, что решение $U(\xi, \eta, t)$ классической задачи Коши (11) строится методом функции Грина в квадратурах [3, с. 130–152].

Решение исходной задачи (2)–(5) строится по формулам (24), (25), где переменные ξ, η имеют вид (6).

Список литературы

1. Холодовский С. Е. Математические основы тепломассопереноса в сложных средах. Чита: ЗабГГПУ, 2012. 77 с.
2. Холодовский С. Е. Тензор эффективной проницаемости сильно неоднородных сред // Инженерно-физический журнал БАН и РАН. 1992. № 1. С. 18–22.
3. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
4. Kholodovskii S. E. A Method of Convolution of Fourier Expansions as Applied to Solving Boundary Value Problems with Intersecting Interface Lines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. No. 9. P. 1489–1495.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1962. Т. 3. 656 с.
6. Васильев Б. А. Плоская стационарная задача теории теплопроводности для составной клиновидной области // Дифференциальные уравнения. 1984. № 3. С. 530–533.
7. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of Generalized Transmission Conditions of Crack (Screen) Type in Piecewise Inhomogeneous Media // Differential Equations. 2009. No. 6. P. 873–877.

8. Kholodovskii S. E. The Convolution Method of Fourier Expansions. The Case of a Crack (Screen) in an Inhomogeneous Space // Differential Equations. 2009. No. 8. P. 1229–1233.
9. Власов П. А., Волков И. К. Температурное поле полупространства, подвижная граница которого с термически тонким покрытием находится под воздействием внешнего теплового потока // Наука и образование МГТУ. 2014. № 11. С. 257–266.
10. Карслу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

Статья поступила в редакцию 23.04.2021; принята к публикации 05.05.2021

Библиографическое описание статьи

Холодовский С. Е., Орлов А. О. О решении задач теплопроводности на анизотропной плоскости со слабопроницаемой плёнкой // Учёные записки Забайкальского государственного университета. 2021. Т. 16, № 3. С. 115–121. DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-115-121.

Svyatoslav Ye. Kholodovskii¹,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Transbaikal State University
(30 Aleksandro-Zavodskaya str., Chita, 672039, Russia),
e-mail: hol47@yandex.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-3983-1384>
Aleksey O. Orlov²,
Candidate of Physics and Mathematics,
Institute of Natural Resources, Ecology and Cryology
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences
(16a Nedorezova str., Chita, 672014, Russia),
e-mail: Orlov_A_O@mail.ru,
<https://orcid.org/0000-0003-2574-181X>

**On Solving Problems of Thermal Conductivity on an Anisotropic Plane
with a Weakly Permeable Film**

The problem of thermal conductivity on an anisotropic plane (x, y) divided into two half-planes $D_1(-\infty < x < 0, y \in R)$ and $D_2(0 < x < \infty, y \in R)$ by a weakly permeable film $x = 0$ is considered at given heat sources and a given initial temperature. The anisotropy ellipses are arbitrary (in magnitude and direction) and are the same at all points of the plane. Using the method of convolution of Fourier expansions, the solution of the problem is expressed in single quadratures through the well-known solution of the classical Cauchy problem on an isotropic plane without a film. The results obtained are of practical interest in the problems of

¹S. Ye. Kholodovskii writing an article.

²A. O. Orlov systematized the material.

heat propagation and conservation in materials with anisotropic properties (crystalline, fibrous materials), in the presence of a thermal insulation film.

Keywords: boundary value problems of thermal conductivity, weakly permeable film, the method of convolution of Fourier expansions

References

1. Kholodovskii, S. E. Mathematical foundations of heat and mass transfer in complex environments. Chita: ZabGGPU, 2012. (In Rus.)
2. Kholodovskii, S. E. Effective permeability tensor of highly heterogeneous media. Engineering Physics Journal BAN and RAS, no. 1, pp. 18–22, 1992. (In Rus.)
3. Arsenin, V. Ya. Methods of mathematical physics and special functions. M: Nauka, 1974. (In Rus.)
4. Kholodovsky, S. E. Method of convolution of fourier expansions as applied to solving boundary value problems with intersecting interface lines. Computational mathematics and mathematical physics, no. 9, pp. 1489–1495, 2007. (In Engl.)
5. Fikhtengolts, G. M. Differential and integral calculus course. Vol. 3. M: Nauka, 1962. (In Rus.)
6. Vasiliev, B. A. Plane stationary problem of the theory of heat conduction for a composite wedge-shaped region. Differential Equations, no. 3, pp. 530–533, 1984. (In Rus.)
7. Kholodovskii, S. E. The convolution method of fourier expansions. The case of generalized transmission conditions of crack (screen) type in piecewise inhomogeneous media. Differential equations, no. 6, pp. 873–877, 2009. (In Engl.)
8. Kholodovsky, S. E. The convolution method of fourier expansions. The case of a crack (screen) in an inhomogeneous space. Differential equations, no. 8, pp. 1229–1233, 2009. (In Engl.)
9. Vlasov, P. A., Volkov, I. K. Temperature field of a half-space, the movable boundary of which with a thermally thin coating is under the influence of an external heat flux. Science and Education MSTU, no. 11, p. 257–266, 2014. (In Rus.)
10. Carslow, G., Jaeger, D. Thermal conductivity of solids. M: Science, 1964. (In Rus.)

Received: April 23, 2021; accepted for publication May 5, 2021

Reference to article

Kholodovskii S. Ye., Orlov A. O. On Solving Problems of Thermal Conductivity on an Anisotropic Plane with a Weakly Permeable Film // Scholarly Notes of Transbaikal State University. 2021. Vol. 15, No. 3. PP. 115–121. DOI: 10.21209/2658-7114-2021-16-3-115-121.